(P23) Principe du radar ($\tau = \frac{MM'}{V}$ et comment le déduire d'un oscillogramme)

(P42) Diffraction

(P58) Diffraction / Lumière

(P76-77) Charge décharge C

(P96-97) Circuit RL

(P115-116) Circuit RLC

MECANIQUE → Savoir écrire vectoriellement les différentes forces mises en TS : (Poids, Réaction Normale, force d'Archimède, frottements, Rappel d'un ressort)

→ Savoir écrire et projeter la 2e loi de Newton.

(P172) Trajectoire parabolique

(P277) Désintégration radioactive

Important : • essaie de maîtriser les questions de cours du type :
prouver que $\tau = RC$ a la dimension d'un temps

• essaie de connaître toutes les unités des grandeurs mises en TS
(Bq, H, µF, etc...).

EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU

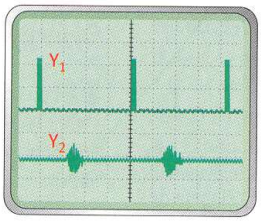
Mesure d'une distance par écho radar

On installe un émetteur d'ultrasons à une distance d d'un obstacle réfléchissant les ondes ultrasonores. Un récepteur d'ultrasons est placé tout près de l'émetteur. La tension délivrée par le générateur alimentant l'émetteur est observée sur la voie Y_1 d'un oscilloscope, la tension de sortie du récepteur sur la voie Y_2.

Le générateur fournit des salves de période T, et de durée très inférieure à T.

On cherche à mesurer avec ce dispositif la distance d.

L'aspect de l'écran de l'oscilloscope est donné sur l'enregistrement ci-contre. La base de temps est réglée sur 1,00 ms par division. La célérité v des ultrasons dans l'air est égale à 340 $m \cdot s^{-1}$.



1. Exprimer littéralement, en fonction de d, la distance totale D parcourue par une salve depuis l'émetteur jusqu'au récepteur. En déduire l'expression de la durée Δt que met la salve pour effectuer un aller-retour.

2. Mesurer sur l'enregistrement la période T des salves. Quelle est la distance totale D_0 parcourue par l'onde pendant la durée T? Justifier le nombre de chiffres significatifs du résultat.

3. En exploitant l'enregistrement, montrer que la distance D parcourue par l'onde lors de l'aller-retour entre l'émetteur et le récepteur vaut $D = x + kD_0$, où k est un nombre entier.

4. Calculer la valeur de x à partir du document.

5. Montrer qu'en faisant varier la période T des salves, il est a priori possible de lever l'indétermination sur D évoquée à la question 3.

CONSEILS

1. *Tenir compte de la réflexion de l'onde sur l'obstacle.*

2. *Lire la durée entre deux salves consécutives en mesurant sur l'écran la distance entre leurs fronts. On peut également mesurer la distance entre les fronts des salves les plus éloignées possible, pour augmenter la précision de la mesure. Utiliser ensuite l'information sur la base de temps de l'oscilloscope.*

3. *La durée de l'aller-retour est-elle plus grande ou plus petite que T? Les traces immédiatement voisines correspondent-elles à une même salve? Comparer T et* $\frac{2d}{v}$.

MODÈLE DE RÉSOLUTION

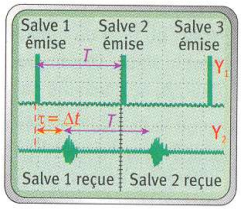
1. Une salve fait un aller vers l'obstacle, se réfléchit et revient vers le récepteur. Elle a parcouru une distance $D = 2d$.

La durée de l'aller-retour est donc $\Delta t = \frac{2d}{v}$.

2. L'écart entre les fronts de deux salves consécutives correspond à 4,2 divisions sur l'écran de l'oscilloscope. Comme chaque division représente une durée de 1,00 ms, $T = 4{,}2$ ms.

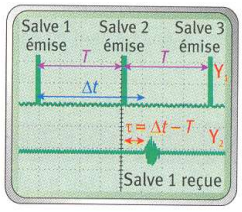
La distance parcourue D_0 par une salve pendant la durée T est donc $D_0 = vT = 340 \times 4{,}2 \cdot 10^{-3} = 1{,}4$ m. Comme la mesure de durée est effectuée avec deux chiffres significatifs, le résultat est donné avec le même nombre de chiffres significatifs.

3. La durée de l'aller-retour d'une salve entre l'émetteur et le récepteur est égale à $\Delta t = \frac{2d}{v}$.



• Soit τ la durée mesurée entre la trace d'une salve émise, et la trace de la première salve immédiatement reçue. Cette durée a même valeur quelle que soit la salve émise. En effet, si $0 < \Delta t < T$, on aura la situation ci-contre sur l'écran de l'oscilloscope. ▶

• Si $T < \Delta t < 2T$, on aura la situation ci-contre. ▶
La durée τ séparant l'émission du 2e pic et la réception du premier s'écrit alors : $\tau = \Delta t - T$ soit $\Delta t = \tau + T$.
On peut généraliser cette expression : la durée Δt qui s'est écoulée entre l'émission d'une salve et sa réception est $\Delta t = \tau + kT$ où k est un entier qui est indéterminé. En multipliant la relation précédente par v, on obtient $D = x + kD_0$ avec $x = v\tau$ et $D_0 = vT$.



4. La durée τ correspond à 1,6 division sur l'écran. On a donc $\tau = 1{,}6$ ms, d'où $x = v\tau = 0{,}54$ m.

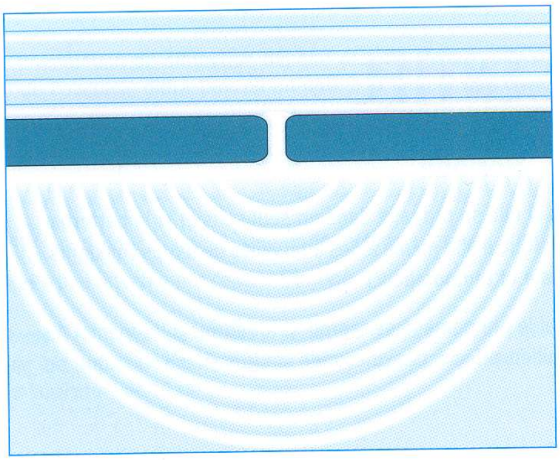
5. Il faut émettre les salves avec une période T plus grande que la durée $\Delta t = \frac{D}{v} = \frac{2d}{v}$.
On a alors $\Delta t = \tau$, c'est-à-dire k = 0.

EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU

Diffraction d'une onde à la surface de l'eau

Le schéma ci-dessous représente le phénomène de diffraction d'une onde sinusoïdale rectiligne, se propageant à la surface de l'eau. L'échelle de longueur est de 1/4. À la fréquence imposée par la source, la célérité des ondes à la surface du liquide vaut 0,30 $m \cdot s^{-1}$.



1. Les ondes qui se propagent à la surface du liquide sont-elles progressives périodiques ?

2. Peut-on déduire du schéma le sens de propagation des ondes à la surface du liquide ?

3. Que vaut la longueur d'onde λ des ondes progressives périodiques rectilignes et circulaires ?

4. Quelle est la période T de l'onde progressive sinusoïdale ?

5. Quelle est sa fréquence N ?

6. Pourquoi l'énoncé précise-t-il « À la fréquence imposée, la célérité vaut 0,30 $m \cdot s^{-1}$ » ?

CONSEILS	MODÈLE DE RÉSOLUTION
1. *Identifier si des points du milieu sont dans le même état vibratoire à l'instant t considéré. Si la distance entre deux séries de points consécutives est constante le long de la direction de propagation, l'onde est périodique.*	**1.** Les ondes se propagent du dispositif « source » vers l'autre extrémité de la cuve. Le schéma est la représentation à l'instant t du milieu. Il fait apparaître des points du milieu dans le même état vibratoire répartis sur des cercles concentriques. La distance entre deux cercles successifs est constante : l'onde est périodique.
2. *Identifier l'onde à l'origine de l'onde diffractée.*	**2.** Les ondes rectilignes donnent naissance à une onde circulaire après diffraction par l'ouverture. La propagation se fait donc de haut en bas.
3. *Mesurer la distance qui sépare deux points du milieu se trouvant dans le même état vibratoire.*	**3.** Sur le schéma, la distance qui sépare deux rides rectilignes est de 0,35 mm. 1 cm sur le schéma correspond à 4 cm à la surface de l'eau : la longueur d'onde vaut donc λ = 1,4 cm. Sur le schéma, la distance qui sépare deux rides circulaires est également de 0,35 mm. La longueur d'onde des ondes circulaires a même valeur que celle des ondes rectilignes.
4. *Appliquer la relation $\lambda = vT$.*	**4.** La longueur d'onde a été déterminée à la question précédente, et la célérité est donnée dans l'énoncé. La période se déduit donc de ces deux grandeurs par la relation $T = \frac{\lambda}{v}$, soit T = 0,047 s.
5. *Par définition de la fréquence, $N = \frac{1}{T}$.*	**5.** $N = \frac{1}{0{,}047\ \text{s}} = 21$ Hz.
6. *Connaître la définition d'un milieu dispersif.*	**6.** Si l'énoncé précise la fréquence, cela signifie que le milieu est a priori dispersif, c'est-à-dire que la célérité dépend de la fréquence de l'onde.

EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU

Mesurer le diamètre d'un cheveu

On souhaite déterminer le diamètre d'un cheveu. Dans un premier temps, on interpose un fil, de diamètre d connu, sur le trajet d'un faisceau lumineux produit par un laser, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 632{,}8$ nm. La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

1. En appliquant le principe de propagation rectiligne, schématiser le trajet suivi par la lumière après l'obstacle (fil).

2. Illustrer, sur un schéma, le phénomène effectivement observé. Quelle est l'expression de la largeur angulaire 2θ du faisceau correspondant à la tache centrale de diffraction ?

3. La distance D qui sépare l'écran du fil est grande devant la largeur L de la tache centrale observée sur l'écran. Dans ces conditions, donner la relation liant l'angle θ, la distance D et la largeur L de la tache.

4. Les mesures de la largeur L de la tache centrale relevées sur l'écran pour des fils de diamètres différents sont données dans le tableau ci-dessous. Tracer la courbe des variations de L en fonction de $\frac{1}{d}$. Déterminer la pente de la droite modélisant au mieux cette courbe, en précisant son unité. Calculer une valeur approchée de la distance D qui sépare l'écran des objets diffractants.

d (mm)	0,10	0,14	0,20	0,25
L (mm)	69	49	34	27

5. La largeur de la tache obtenue avec le cheveu est de 3,1 cm. Calculer de deux manières le diamètre d du cheveu.

CONSEILS

1. *La zone d'ombre est parfaitement délimitée par le contour de l'obstacle éclairé.*

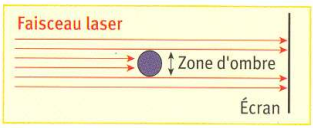
2. *La largeur angulaire totale du faisceau est le double de l'écart angulaire :*

$$\theta = \frac{\lambda_0}{d}.$$

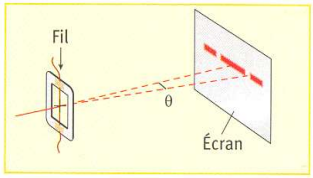
4. *Calculer toutes les valeurs de $\frac{1}{d}$ avant de tracer la courbe. La courbe obtenue est une droite : déterminer sa pente et son ordonnée à l'origine (ici l'ordonnée à l'origine est nulle).*

MODÈLE DE RÉSOLUTION

1. D'après le principe de propagation rectiligne, la lumière se propage en ligne droite quelle que soit la taille de l'obstacle qu'elle rencontre.



2. La lumière se comporte comme une onde. Lorsqu'elle rencontre un obstacle de petite taille, elle est diffractée et la zone d'ombre prévue à la question 1 n'existe pas. Le faisceau diffracté présente une tache centrale de largeur angulaire 2θ, donnée par la relation $2\theta = 2\frac{\lambda_0}{d}$.



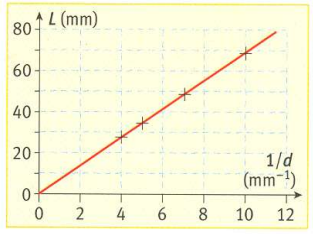
3. Puisque la distance D est grande devant la taille de la tache sur l'écran, l'angle θ est faible et il est possible de confondre l'angle et sa tangente. Ce qui donne $\tan\theta \approx \theta$ avec $\tan\theta = \frac{L}{2D}$. D'où $\theta \approx \frac{L}{2D}$.

4. Le calcul des différentes valeurs de $\frac{1}{d}$ est donné dans le tableau ci-contre. ▶

L (mm)	69	49	34	27
$\frac{1}{d}$ (mm^{-1})	10	7,1	5,0	4,0

La courbe obtenue est une droite. Ce résultat était prévisible puisque la relation vue en cours ($\theta = \frac{\lambda_0}{d}$) et l'expression obtenue à la question précédente conduisent à $\frac{L}{2D} = \frac{\lambda_0}{d}$, ou encore $L = 2\lambda_0\frac{D}{d}$.

La pente de la droite est $2\lambda_0 D = 6{,}9\,\text{mm}^2$, soit en exprimant toutes les longueurs en mm : $6{,}9 = 2D \times 632{,}8 \cdot 10^{-6}$. D'où $D = 5{,}4$ m.



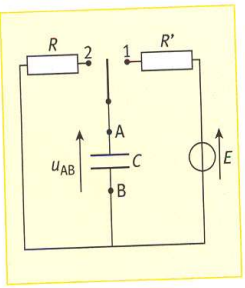
5. À partir de l'expression précédente $L = 2\lambda_0\frac{D}{d}$, il est possible de connaître directement le diamètre d du cheveu. La largeur de la tache est de 31 mm, ce qui conduit à un diamètre de 0,22 mm pour le cheveu. On peut également utiliser la droite tracée à la question précédente comme droite d'étalonnage. En lisant sur cette droite la valeur de $\frac{1}{d}$ correspondant à $L = 31$ mm, on trouve le même résultat.

EXERCICES

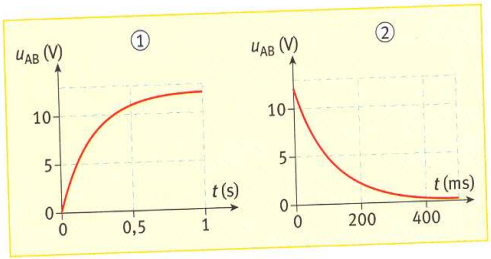
EXERCICE RÉSOLU

Décharge dans une résistance *R*

On réalise le circuit électrique dont le montage est présenté ci-dessous.



On relève la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un ordinateur avec centrale d'acquisition munie d'un capteur voltmètre. On obtient ainsi les graphes représentant la tension $u_{AB}(t)$ aux bornes du condensateur, au cours de sa charge ou de sa décharge.



Lorsque l'interrupteur est en position 1, le condensateur est chargé à travers une résistance R', à l'aide d'un générateur de tension continue de force électromotrice $E = 12$ V. À l'instant $t = 0$, alors que le condensateur est complétement chargé, on bascule l'interrupteur en position 2 : le condensateur se décharge dans la résistance $R = 500\ \Omega$.

1. En appliquant la loi d'additivité des tensions lors de la décharge, établir la relation entre les tensions aux bornes des différents dipôles. Montrer que l'on obtient, pour $t > 0$:

$$RC\frac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = 0$$

2. Vérifier que la solution $u_{AB}(t)$ de l'équation différentielle établie peut être exprimée sous la forme : $u_{AB}(t) = Ae^{-t/RC}$ avec A constante que l'on exprimera à l'aide des conditions initiales.

3. Attribuer à chaque courbe le phénomène observé : charge ou décharge du condensateur.

4. Établir l'expression de $i(t)$. Tracer l'allure de la courbe correspondant à $i(t)$ lors de la décharge.

5. Rappeler l'expression et l'unité de la constante de temps τ du dipôle RC. Déterminer sa valeur en utilisant la courbe représentative de la fonction $u_{AB}(t)$. En déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

6. Déterminer alors la valeur de R' (circuit de charge).

7. Lorsque le condensateur est complètement déchargé, exprimer l'énergie qui a été dissipée par effet Joule dans la résistance.

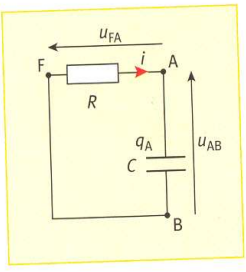
CONSEILS

1. *Orienter le circuit (point bac).*

2. *u_{AB} est une grandeur continue.*

3. *Utiliser les conditions initiales.*

MODÈLE DE RÉSOLUTION



1. Loi d'additivité des tensions : $u_{AB} + u_{FA} = 0$

soit : $u_{AB} + (+Ri) = 0$ (1)

Or : $i = \dfrac{dq_A}{dt}$ et $q_A = Cu_{AB}$

D'où : $i = C\dfrac{du_{AB}}{dt}$. En remplaçant i dans l'équation (1), il vient :

$u_{AB} + R\left(C\dfrac{du_{AB}}{dt}\right) = 0$ d'où $RC\dfrac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = 0$

2. Si $u_{AB}(t) = Ae^{-t/RC}$ alors $\dfrac{du_{AB}}{dt} = -\dfrac{A}{RC}e^{-t/RC}$

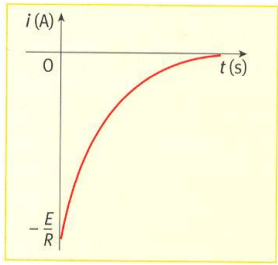
D'où $RC\dfrac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = -\dfrac{ARC}{RC}e^{-t/RC} + Ae^{-t/RC} = 0$. La solution vérifie l'équation différentielle.

Calcul de la constante A : $u_{AB} = E$ à l'instant $t = 0$, soit $u_{AB}(0) = Ae^{-0/RC} = E$.

D'où $A = E$. La tension u_{AB}, solution de l'équation différentielle, s'écrit donc : $u_{AB}(t) = Ee^{-t/RC}$.

3. La courbe 1 correspond à la courbe de charge du condensateur, car la tension u_{AB} à ses bornes est une fonction croissante du temps. De même, la courbe 2 correspond à la courbe de décharge du condensateur, car la tension u_{AB} à ses bornes est une fonction décroissante du temps.

CONSEILS	MODÈLE DE RÉSOLUTION
4. *Vérifier que l'on est bien en convention récepteur.*	**4.** On peut écrire : $i(t) = C\dfrac{du_{AB}}{dt}$ d'où : $i(t) = -\dfrac{CE}{RC}\,e^{-t/RC}$ $i(t) = -\dfrac{E}{R}e^{-t/RC}$ Lors de la décharge du condensateur, l'intensité $i(t)$ a donc l'allure ci-contre. ▶
5. *L'argument d'une fonction exponentielle est sans dimension : [RC] = [t] = T.*	**5.** La constante de temps a pour expression : $\tau = RC$. La capacité C du condensateur s'exprime en farad (F) et la résistance R en ohm (Ω) : τ s'exprime en seconde (s). **Détermination de la valeur de τ :** $u_{AB}(\tau) = Ee^{-\tau/RC} = Ee^{-1} = 0{,}37E$. Soit avec $E = 12$ V, $u_{AB} = 0{,}37 \times 12 \approx 4{,}4$ V. Pour déterminer la valeur de τ, il suffit donc de lire sur la courbe de $u_{AB}(t)$ l'abscisse du point d'ordonnée $0{,}37E$ qui correspond à $u_{AB}(\tau)$. On trouve ainsi : $\tau \approx 110$ ms. (Il est aussi possible de tracer la tangente à l'origine à la courbe : elle coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$.) On en déduit la valeur de C : $C = \dfrac{\tau}{R}$ Avec $R = 500\ \Omega$ et $\tau = 110$ ms : $C = \dfrac{110 \cdot 10^{-3}}{500} = 220 \cdot 10^{-6} = 220\ \mu F$. **6.** Pour trouver la valeur de R', on détermine graphiquement la constante de temps du dipôle R'C du circuit de charge. $u_{AB}(\tau') = E(1 - e^{-\tau'/RC}) = E(1 - e^{-1}) = 0{,}63E$. Sur la courbe de $u_{AB}(t)$ correspondant à la charge du condensateur, il suffit donc de lire l'abscisse du point d'ordonnée $0{,}63E$, c'est-à-dire, avec $E = 12$ V, d'ordonnée : $0{,}63 \times 12 \approx 7{,}6$ V. On trouve ainsi : $\tau' \approx 0{,}22$ s. On peut aussi tracer la tangente à l'origine à la courbe, puisqu'elle coupe l'asymptote d'équation $u_{AB} = E$ à $t = \tau'$. On en déduit la valeur de R' : $R' = \dfrac{\tau'}{C}$. Avec $C = 220\ \mu F$ et $\tau' = 0{,}22$ s, on obtient $R' = \dfrac{0{,}22}{220 \cdot 10^{-6}} = 1\,000\ \Omega$. **7.** Si on suppose que l'énergie emmagasinée par le condensateur a été intégralement dissipée dans la résistance par effet Joule : $\mathcal{E}_{\text{emmagasinée par le condensateur}} = \dfrac{1}{2}CE^2 = \mathcal{E}_{\text{dissipée par effet Joule dans la résistance}}$



Point bac

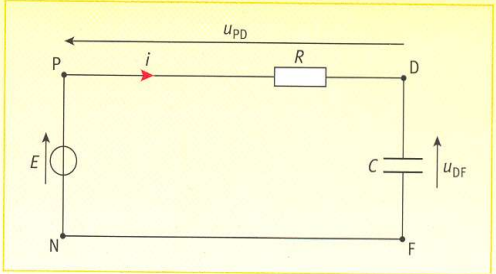
Orientation d'un circuit

▶ **1.** Dessiner le circuit en le simplifiant si nécessaire.

▶ **2.** Nommer chaque borne de dipôle par une lettre majuscule non ambiguë (exemple : ne pas utiliser C ou E).

▶ **3.** Orienter le circuit, c'est-à-dire choisir arbitrairement un sens pour le circuit série. Le représenter sur le schéma par une flèche.

▶ **4.** Placer les flèches tensions aux bornes des différents dipôles. Nommer les tensions ainsi représentées.



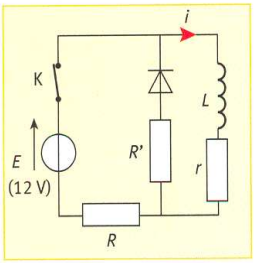
EXERCICES

EXERCICES

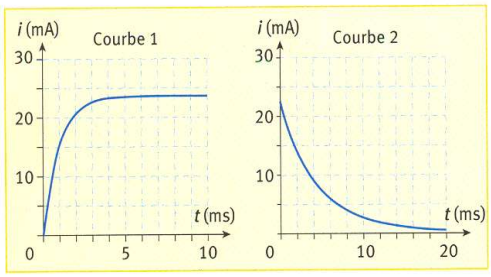
EXERCICE RÉSOLU

Établissement et rupture du courant dans un circuit inductif

On réalise le circuit électrique suivant, avec les composants de valeur: $R = 500\ \Omega$, $R' = 100\ \Omega$, $r = 10\ \Omega$.



On relève l'intensité du courant à l'aide d'un ordinateur et d'une centrale d'acquisition munie d'un capteur ampèremètre. On obtient ainsi les graphes représentant l'intensité $i(t)$ au cours de l'établissement et de la rupture du courant.



Initialement, l'interrupteur est fermé depuis longtemps: la bobine est en série avec une résistance R et un générateur de tension continue de force électromotrice $E = 12$ V.

À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur: la bobine est en série avec la résistance R' et une diode.

1. Indiquer à quelle courbe correspondent l'établissement et la rupture du courant.

2. Justifier la présence aux bornes de la bobine d'une diode dite «de roue libre».

3. Montrer qu'à la date $t = 0$ lorsque l'interrupteur K est ouvert, l'équation différentielle à laquelle obéit l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit est:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0 \qquad \text{avec } \tau = \frac{L}{R' + r} = \frac{L}{R_t}$$

4. La solution $i(t)$ de l'équation différentielle établie peut être proposée sous la forme: $i(t) = A\, e^{-\frac{t}{\tau}} + B$ avec A et B constantes. Exprimer A et B en fonction des caractéristiques électriques du circuit.

5. Confronter l'allure de la courbe obtenue lors de l'acquisition à l'expression de $i(t)$.

6.a. Rappeler l'unité de la constante de temps τ.
b. Déterminer graphiquement, et de deux façons différentes, la valeur de τ du dipôle constitué par la bobine en série avec la résistance R'.
c. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

7. Exprimer en fonction des caractéristiques du circuit, l'énergie qui a été dissipée par effet Joule dans le circuit, après ouverture de l'interrupteur.

CONSEILS

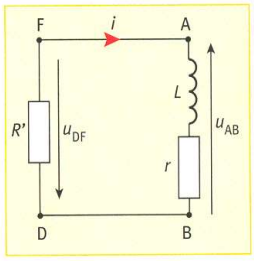
3. Lorsque l'interrupteur est ouvert, le circuit électrique correspond simplement à une bobine en série avec une résistance R'. Nommer chaque borne des différents dipôles. Orienter le circuit.
Appliquer la loi d'additivité des tensions.

MODÈLE DE RÉSOLUTION

1. La courbe 1 correspond à l'établissement du courant: l'intensité du courant est une fonction croissante du temps. De même, la courbe 2 correspond à la rupture du courant: l'intensité du courant est une fonction décroissante du temps.

2. La présence de la diode, permet d'éviter l'étincelle de rupture lors de l'ouverture du circuit.

3. On oriente le circuit (schéma ci-contre). ▶



$$u_{AB} + u_{DF} = 0$$
$$u_{AB} + (+R'i) = 0$$

Avec l'orientation choisie, la relation tension-intensité pour une bobine d'inductance L et de résistance interne r s'exprime par:

$$u_{AB} = L\frac{di}{dt} + ri$$

La loi d'additivité des tensions s'écrit alors:

$$L\frac{di}{dt} + ri + R'i = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \left[\frac{R' + r}{L}\right] i = 0$$

En posant $\tau = \frac{L}{R' + r}$, l'équation différentielle devient: $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0$.

CONSEILS	MODÈLE DE RÉSOLUTION
4. Remplacer l'expression de $i(t)$ dans l'équation différentielle. $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.	**4.** On cherche à exprimer les constantes A et B en fonction des caractéristiques du circuit, pour que $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$ soit solution de l'équation différentielle $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0$ • **Détermination de B :** $\frac{d}{dt}(Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B) + \frac{1}{\tau}(Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B) = 0$. $-\frac{1}{\tau}Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}B = 0$. d'où $\frac{1}{\tau}B = 0$, soit $B = 0$. • **Détermination de A :** on utilise les conditions initiales et la continuité de $i(t)$. À $t = 0$, l'intensité du courant est égale à $\frac{E}{R+r}$: $i(0) = Ae^{-\frac{1}{\tau}0} = A = \frac{E}{R+r}$ La solution $i(t)$ de l'équation différentielle peut donc être exprimée sous la forme : $i(t) = \frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$
5. Faire une étude mathématique de la fonction $i(t)$.	**5.** L'étude mathématique de la fonction $i(t) = \frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$ montre que : – la fonction $i(t)$ est décroissante car sa dérivée $\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$ est strictement négative sur l'intervalle $[0, +\infty[$; – les limites de $i(t)$ lorsque $t = 0$ et t tend vers $+\infty$ sont respectivement $\frac{E}{R+r}$ et 0. Ces résultats sont en accord avec la courbe obtenue lors de l'acquisition. Pour $t = 0$, l'intensité vaut $\frac{E}{R+r}$. Pour des valeurs de t de l'ordre de quelques τ, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses : l'intensité tend vers une valeur nulle. **6.a.** Si l'inductance de la bobine s'exprime en henrys et les résistances R' et r en ohms, alors $\tau = \frac{L}{R'+r}$ s'exprime en secondes. **b.** Sur la courbe 2 de $i(t)$, on lit l'abscisse du point d'ordonnée $i(\tau)$. En effet, $i(\tau) = \frac{E}{R+r}e^{-\frac{\tau}{\tau}} = \frac{E}{R+r}e^{-1} = 0{,}37\frac{E}{R+r}$ Avec $E = 12$ V, $R = 500\ \Omega$ et $r = 10\ \Omega$, $i(\tau) = 0{,}37 \times \frac{12}{500+10} = 0{,}0087$ A $= 8{,}7$ mA. Une seconde méthode consiste à tracer la tangente à l'origine à la courbe représentative de $i(t)$. Elle coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$. En utilisant ces deux méthodes graphiques, on détermine la valeur de la constante de temps : $\tau \approx 4{,}3$ ms. **c.** À partir de la valeur de τ, on détermine la valeur de l'inductance de la bobine : $\tau = \frac{L}{R'+r}$ soit $L = \tau(R'+r)$ **A.N.** $R' = 100\ \Omega$, $r = 10\ \Omega$ et $\tau = 4{,}3$ ms ; $L = \tau(R'+r) = 4{,}3 \cdot 10^{-3} \times (100+10) = 473$ mH. **7.** Si on suppose que l'énergie acquise par la bobine, $\mathscr{E}_{bob}$, lors de l'établissement du courant jusqu'à sa valeur asymptotique, a été intégralement dissipée par effet Joule lorsque l'interrupteur a été ouvert, on peut écrire : $\mathscr{E}_{bob} = \frac{1}{2}LI^2 = \mathscr{E}_{joule}$. I est la valeur initiale de l'intensité, soit $I = \frac{E}{R+r}$ donc : $\mathscr{E}_{joule} = \frac{1}{2}L\left[\frac{E}{R+r}\right]^2$.

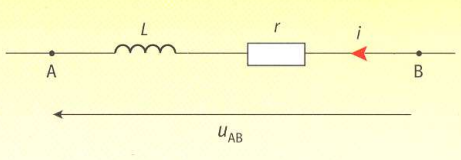
Point bac

Relation tension-intensité pour une bobine

▶ La relation tension-intensité aux bornes d'une bobine est algébrique. Pour une utilisation sans ambiguïté, il faut l'associer à un schéma précisant l'orientation choisie, ainsi que la dénomination des bornes de la bobine.

Par exemple, pour le schéma ci-contre, on a :

$$u_{AB} = -L\frac{di}{dt} + (-ri)$$



EXERCICES

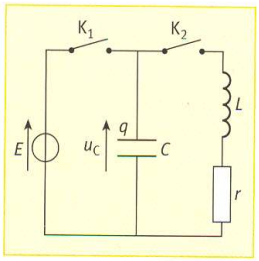
EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU

Énergie emmagasinée dans un condensateur

On considère le montage ci-contre. ▶

$E = 10$ V, $L = 100$ mH. K_2 est ouvert. On ferme K_1 pour charger le condensateur.



1. À un instant $t = 0$ pris comme origine des dates, on ouvre K_1 et on ferme K_2.

a. On étudie les oscillations libres qui prennent naissance dans le circuit constitué du condensateur et de la bobine. Pourquoi parle-t-on d'oscillations libres ?

b. Faire un schéma du circuit en choisissant une orientation.

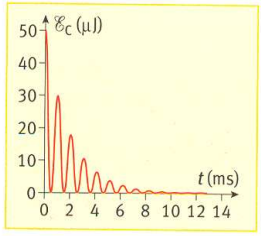
2. On suppose dans cette question que $r = 0$.

a. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $u_C(t)$.

b. En déduire le bilan énergétique du circuit faisant intervenir les énergies $\mathscr{E}_C$ et $\mathscr{E}_L$ emmagasinées respectivement dans le condensateur et dans la bobine.

c. Interpréter ce bilan et représenter qualitativement sur une même figure l'allure de $\mathscr{E}_C(t)$ et de $\mathscr{E}_L(t)$.

3. Le document suivant donne l'évolution de l'énergie $\mathscr{E}_C$ emmagasinée dans le condensateur au cours du temps.



a. Que peut-on dire de l'évolution de $\mathscr{E}_C(t)$. Comparer au cas du **2.c**.

b. Choisir alors, parmi les termes suivants, celui qui qualifie les oscillations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur : entretenues, apériodiques, pseudo-périodiques.

c. Expliquer, sans calcul, comment modifier le bilan énergétique établi en **2.b**.

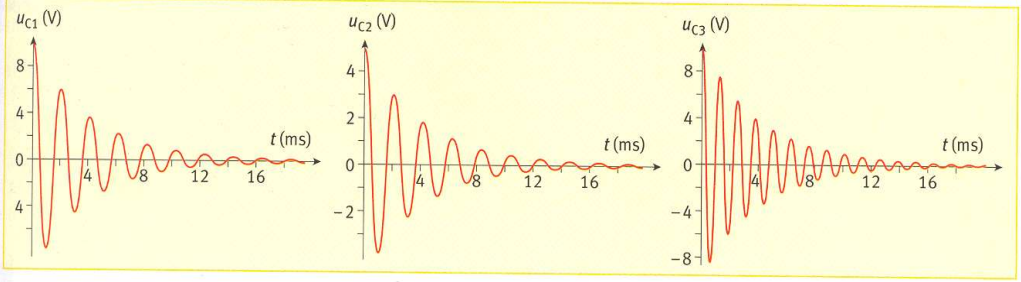
d. Exprimer, en fonction de la capacité C, l'énergie $\mathscr{E}_C(0)$ emmagasinée dans le condensateur à l'instant $t = 0$.

e. En utilisant la courbe de $\mathscr{E}_C(t)$, déduire la valeur de C.

4. On s'intéresse maintenant à la courbe de $u_C(t)$. On cherche à déterminer quelle courbe, parmi celles présentées ci-dessous, correspond à $u_C(t)$.

a. Calculer la pseudo-période des oscillations de $u_C(t)$.

b. Indiquer alors la courbe représentant $u_C(t)$.



CONSEILS

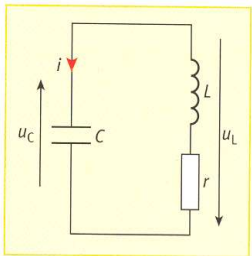
***1.b.** Le choix de l'orientation du circuit est arbitraire. Il faudra s'y tenir tout le long du problème et exprimer correctement les relations entre intensité, charge et tensions dans le circuit.*

***2.a.** Quelle que soit l'orientation choisie, la mise en équation du problème aboutira à la même équation différentielle.*

MODÈLE DE RÉSOLUTION

1.a. L'interrupteur K_1 étant ouvert, il n'y a pas d'apport d'énergie au circuit pour $t > 0$. Il s'agit donc d'une évolution en régime libre.

b.



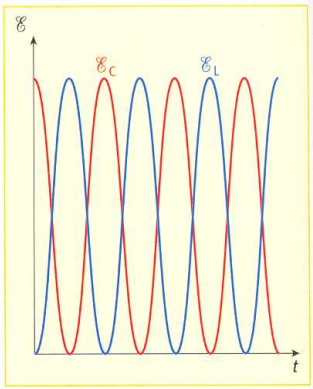
2.a. La loi d'additivité des tensions permet d'écrire : $u_L + u_C = 0$.

Avec l'orientation choisie ici, on a $i = \dfrac{dq}{dt}$.

Comme $q = Cu_C$, on a $i = C\dfrac{du_C}{dt}$. De plus $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ d'où : $u_L = LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$.

La loi d'additivité des tensions s'écrit donc : $LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$.

EXERCICES

CONSEILS	MODÈLE DE RÉSOLUTION
	b. L'équation différentielle vérifiée par u_C peut également s'exprimer sous la forme : $L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$. On multiplie cette équation par $i=\frac{dq}{dt}$: $L\frac{di}{dt}\cdot i+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=0$ soit $\frac{d}{dt}\left[\frac{Li^2}{2}+\frac{q^2}{2C}\right]=0$. Cette relation constitue le bilan énergétique du circuit LC. $\mathscr{E}_L(t)=\frac{Li^2(t)}{2}$ représente l'énergie emmagasinée à la date t dans la bobine. $\mathscr{E}_C(t)=\frac{q^2(t)}{2C}$ représente l'énergie emmagasinée à la date t dans le condensateur. **c.** Le bilan énergétique peut également s'exprimer par la relation $\frac{d\mathscr{E}_L}{dt}=-\frac{d\mathscr{E}_C}{dt}$. Il y a donc échange d'énergie au cours du temps entre la bobine et le condensateur, l'énergie totale restant constante. 
	3.a. On constate que, contrairement au cas traité en **2.c**, l'amplitude des oscillations de $\mathscr{E}_C(t)$ n'est pas constante au cours du temps, mais diminue. L'énergie maximale emmagasinée dans le condensateur diminue.
3.b. Les variations de $u_C^2(t)$ sont proportionnelles à celles de $\mathscr{E}_C(t)$. On en déduit que les oscillations de $u_C(t)$ sont pseudo-périodiques.	**b.** $\mathscr{E}_C(t)=\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)$. L'énergie du condensateur est proportionnelle au carré de la tension à ses bornes. La tension u_C présente donc des oscillations d'amplitude décroissante, c'est-à-dire pseudo-périodiques. **c.** La résistance du circuit n'étant pas nulle, le bilan énergétique ne se résume pas à un simple échange d'énergie entre la bobine et le condensateur. L'énergie totale n'est plus constante, puisqu'une partie de l'énergie du circuit est dissipée par effet Joule. **d.** À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est E. L'énergie emmagasinée à cet instant dans le condensateur est donc : $\mathscr{E}(0)=\frac{CE^2}{2}$, soit $\mathscr{E}(0) = 50C$ (en J). **e.** Par lecture sur la courbe, $E_C(0) = 50$ µJ. On en déduit alors : $50C = 50\cdot10^{-6}$, soit $C = 1$ µF.
4.a. Il est nécessaire de rappeler l'approximation utilisée ici, consistant à confondre pseudo-période et période propre. *b. Les courbes $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$ ont même allure, mais l'échelle en ordonnée est différente.*	**4.a.** En supposant que l'on peut assimiler la pseudo-période T des oscillations de u_C à la période propre T_0 des oscillations du circuit LC correspondant, on a : $T=2\pi\sqrt{LC}$. A.N. $T = 2{,}0$ ms. **b.** Pour identifier la courbe de $u_C(t)$, on sait que $u_C(0) = E = 10$ V et que $T = 2{,}0$ ms. Cela permet de choisir sans ambiguïté la courbe u_{C1}.

Point bac

Équation différentielle du circuit LC

Pour établir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ dans le circuit LC série, il faut :

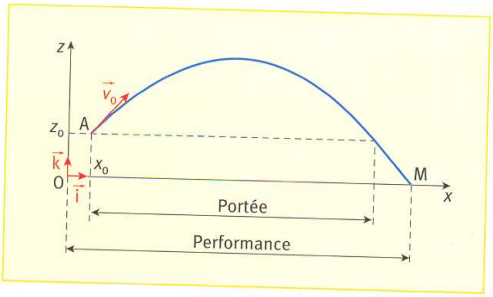
1. Orienter le circuit
2. Appliquer la loi d'additivité des tensions au circuit.
3. Exprimer la tension aux bornes du condensateur et de la bobine en fonction de $q(t)$, L et C.
4. L'équation différentielle s'écrit : $LC\frac{d^2q}{dt^2}+q=0$.

EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU 1

Lancement du poids

Un sportif pratiquant le lancer de poids désire améliorer ses performances. À la date $t = 0$, à la suite de la phase d'élan, le lanceur lâche le poids au point A dans le repère terrestre $(O ; \vec{i}, \vec{k})$, avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec le vecteur horizontal $\vec{i}$. On prendra $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.



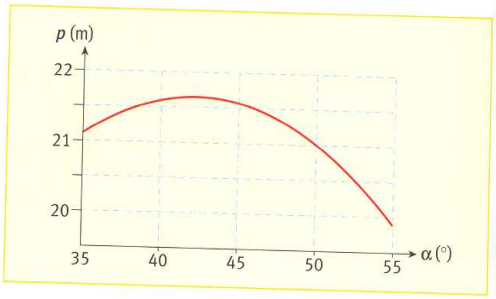
Le point O se trouve en bordure de l'aire de lancement. Le point A a pour coordonnées $x_0 = 0{,}60$ m et $z_0 = 2{,}00$ m. On mesure grâce à un enregistrement vidéo $v_0 = 13{,}7\ m \cdot s^{-2}$. La performance p est la distance entre le point O et le point de chute (noté M) du poids sur le sol.

1. Établir les équations paramétriques $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du poids.

2. Le poids retombe en M à la date t_M. Donner l'équation littérale vérifiée par t_M. Exprimer t_M.

3. En déduire l'expression numérique de la performance p en ne conservant que le paramètre α.

4. On donne la courbe représentant p en fonction de α, pour α variant de 35° à 55°. Pour quelle valeur de α la performance est-elle maximale ? Quelle est cette performance ? Que vaudrait-elle pour $\alpha = 37°$? 47° ?



5. Pour quelle valeur de l'angle α la portée (voir schéma ci-contre) serait-elle maximale ?

CONSEILS

1. *La composante de $\vec{g}$ sur $\vec{k}$ est négative puisque $\vec{k}$ est orienté vers le haut.*
Ne pas oublier les constantes d'intégration : on les détermine grâce aux conditions initiales du mouvement.

2. *La date t_M ne peut être négative.*

3. *Savoir interpréter les grandeurs sur les axes du graphique.*

MODÈLE DE RÉSOLUTION

1. $\vec{a} = \vec{g}$. En projection sur $(\vec{i}, \vec{k})$, on obtient $\frac{dv_x}{dt} = 0$ et $\frac{dv_z}{dt} = -g$.

Alors $v_x = C_1$ et $v_z = -gt + C_2$.

Conditions initiales : $v_x(t = 0) = C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $v_z(t = 0) = C_2 = v_0 \sin\alpha$

soit : $v_x = v_0 \cos\alpha$ et $v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$

On en déduit : $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$ et $\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha$

d'où : $x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t + K_1$ et $z(t) = -1/2gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + K_2$

Conditions initiales : $x(t = 0) = K_1 = x_0$ et $z(t = 0) = K_2 = z_0$

soit : $x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t + x_0$ et $z(t) = -1/2gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + z_0$

2. $z_M = 0$ par définition. t_M vérifie donc l'équation du second degré :

$$-1/2gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + z_0 = 0$$

$t_M = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gz_0}}{g}$. L'autre racine de l'équation est négative.

3. $x_M = v_0 \cos\alpha \cdot t_M + x_0 = 1{,}40 \cos\alpha [13{,}7 \sin\alpha + \sqrt{188 \sin^2\alpha + 39{,}2}] + 0{,}6$.

4. Sur la courbe, on trouve que p est maximale pour $\alpha = 42°$, $p_{max} = 21{,}7$ m. Pour 37° et 47°, $p = 21{,}5$ m.

5. $\alpha = 45°$.

EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU

Étude d'une désintégration radioactive

Le polonium $^{210}_{84}$Po est un noyau radioactif, qui se désintègre avec émission d'une particule α.

1. Écrire l'équation de la désintégration produite, en indiquant les lois de conservation à respecter.

2. À la date $t = 0$, on dispose de N_0 noyaux de $^{210}_{84}$Po radioactif. À la date t, il reste N noyaux non désintégrés. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous:

t (jours)	0	40	80	120	160	200	240
N/N_0	1	0,82	0,67	0,55	0,45	0,37	0,30

a. Tracer le courbe représentative de $f(t) = -\ln(N/N_0)$. Échelle: 1 cm → 20 jours; 1 cm → 0,1.
b. Déterminer graphiquement la constante radioactive λ du polonium en secondes.
c. Calculer la demi-vie du polonium 210 en jours.

3.a. Si l'échantillon contient N_0 noyaux radioactifs à la date $t = 0$, exprimer l'activité A_0 à la date $t = 0$ en fonction de λ et de N_0, sachant que l'activité A à la date t est donnée par l'expression: $A(t) = \left|\frac{dN(t)}{dt}\right|$.
b. Calculer en becquerels (Bq) la valeur de l'activité A_0, pour $N_0 = 2{,}00 \cdot 10^{14}$.

4.a. Tracer la courbe d'évolution de $[N_0 - N(t)]/N_0$ en fonction de t. Que représente cette courbe?
b. Déterminer théoriquement l'équation de la courbe. Vers quelle valeur tend-elle lorsque t tend vers l'infini?
c. Déterminer la demi-vie de la source à partir de cette courbe. Comparer avec la valeur obtenue à la question 2.c.

CONSEILS

1. Déterminer les caractéristiques du noyau fils, en appliquant les lois de conservation de la charge électrique et du nombre de nucléons. Pour une désintégration α, on a: $A_{fils} = A_{père} - 4$ et $Z_{fils} = Z_{père} - 2$.

2.b. Propriété de la fonction logarithme: $\ln(e^x) = x$.
L'unité de la constante de radioactivité dans le système international est: s^{-1}.

c. Écrire la définition de $t_{1/2}$ pour retrouver son expression en fonction de λ. , $N(t_0 + t_{1/2}) = N_0/2 = N_0\, e^{-\lambda t_{1/2}}$.

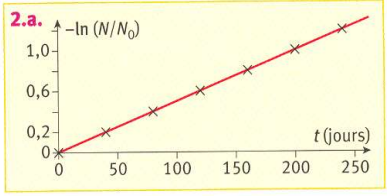
3.a. Dériver la loi de décroissance par rapport au temps. $e^0 = 1$.

4.a. Il faut calculer $[N_0 - N(t)]/N_0$ à chaque instant à partir des valeurs du tableau.

MODÈLE DE RÉSOLUTION

1. L'équation de la désintégration α proposée ici est de la forme: $^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{A}_{Z}\text{Y}$.
Conservation du nombre de nucléons: $210 = 4 + A$, soit $A = 210 - 4 = 206$.
Conservation de la charge électrique: $84 = 2 + Z$, soit $Z = 84 - 2 = 82$.
Le numéro atomique 82 correspond à l'élément plomb. Le noyau fils obtenu ici est donc: $^{206}_{82}$Pb. L'équation s'écrit ainsi: $^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{206}_{82}\text{Pb}$.

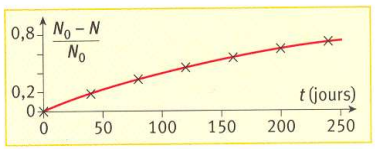
2.a.



b. La loi de décroissance radioactive s'exprime par: $N = N_0\, e^{-\lambda t}$, soit:
$$N/N_0 = e^{-\lambda t}.$$
En prenant les logarithmes de l'expression: $\ln(N/N_0) = -\lambda t$ d'où:
$$\lambda = -\ln(N/N_0)/t$$
λ correspond donc au coefficient directeur de la droite tracée à la question 2.a. En considérant les points A(0 ; 0) et B(1,00 ; 200), on obtient:
$$\lambda = (1{,}00 - 0)/(200 - 0) = 1{,}00/200\ \text{j}^{-1}.$$
Avec 1 j = 86 400 s, on obtient: $\lambda = 1{,}00/(200 \times 86\,400) = 5{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{s}^{-1}$.
c. La demi-vie est égale à la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents se sont désintégrés.
$$t_{1/2} = \ln 2/\lambda = \ln 2/5{,}79 \cdot 10^{-8} = 1{,}2 \cdot 10^{7}\ \text{s}.$$
Soit en jours: $t_{1/2} = 1{,}20 \cdot 10^{7}/86\,400 = 140$ jours.

3.a. En utilisant la loi de décroissance radioactive (cf. 2.b.), on a:
$A(t) = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|-\lambda N_0 e^{-\lambda t}\right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$. À la date $t = 0$, on obtient $A_0 = \lambda N_0$.
b. Pour $N_0 = 2{,}00 \cdot 10^{14}$, $A_0 = 5{,}79 \cdot 10^{-8} \times 2{,}00 \cdot 10^{14} = 1{,}2 \cdot 10^{7}$ Bq.

4.a. N_0 est le nombre de noyaux radioactifs à l'instant $t = 0$. N représente le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t. La différence des deux correspond au nombre de noyaux qui se sont désintégrés à l'instant t. Le tout divisé par N_0 représente la proportion de noyaux qui se sont désintégrés à l'instant t.



b. On sait, d'après la loi de décroissance que: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.
D'où: $[N_0 - N(t)]/N_0 = (1 - e^{-\lambda t})$. Si t tend vers l'infini, la courbe tend vers 1, c'est-à-dire que 100 % des noyaux se sont désintégrés.
c. Après une durée $t_{1/2}$, on a par définition: $[N_0 - N(t + t_{1/2})]/N_0 = 0{,}5$. D'après la courbe, on obtient: $t_{1/2} = 140$ jours, ce qui est conforme à la valeur obtenue à la question 2.c.